Tentamen
VASTE STOF MECHANICA (NAVSM)
25 juni 2004, 14–17 uur

Vraag 1 Gegeven zijn de componenten van de spanningstensor in een (x,y,z) coordinatensysteem (in kPa)

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 300 \\ 0 & 100 & 0 \\ 300 & 0 & -200 \end{bmatrix}$$

a. Bereken de componenten van de tractievector op een vlak evenwijdig aan het vlak gegeven door $x+2y+2z-6=0$.

b. Bereken de hoofdspanningen (*principal stresses*) alsmede de maximale schuifspanning.

Vraag 2 Von Mises (1883–1953) stelde de volgende scalaire representatie van een spanningstensor voor:

$$\sigma_{\rm v} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}.$$

Hierin is, zoals gebruikelijk,

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

de spanningsdeviator.

a. Bereken $\sigma_{\rm v}$ voor éénassige trek (*uniaxial tension*) met spanning σ en voor éénassige druk.

b. Druk $\sigma_{\rm v}$ uit in de schuifspanning τ in het geval van een zuiver schuifspanningssituatie (bijvoorbeeld: $\sigma_{12}=\sigma_{21}=\tau$, alle overige $\sigma_{ij}=0$).

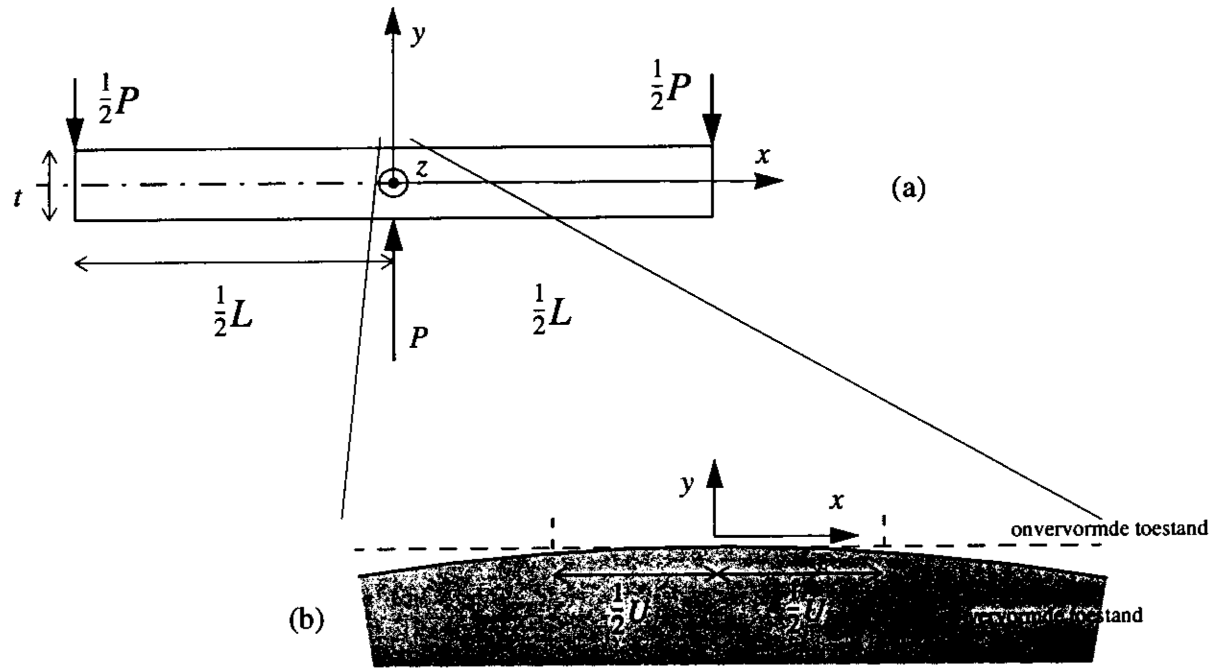
c. Volgens de cirkel van Mohr uit hoofdstuk 2.6 is zuivere afschuiving te zien als een combinatie van trek en druk in twee onderling loodrechte richtingen. Geldt dit ook voor de corresponderende Von Mises spanningen uit a) en b)? Leg uit.

Vraag 3 Een zogenaamde breekjunctie is een device dat, onder andere, gebruikt wordt om het gedrag van enkele moleculen te meten. Een breekjunctie bestaat primair uit een metalen strip (lengte L, dikte t) die op twee punten wordt tegengehouden en wordt gebogen door het midden omhoog te duwen (figuur a). Aan de bovenzijde worden aan weerszijde van het midden twee kleine dammetjes gemaakt op onderlinge afstand U (figuur b). De hoogte ervan is te verwaarlozen ten opzichte van de dikte van de strip en $U \ll L$.

a. Leidt de relatie af tussen de kracht P die in het midden van de strip wordt aangebracht en de verticale verplaatsing $W = w(x=0)$ van dat punt:

$$W = \frac{PL^3}{48EI}$$

als I het traagheidsmoment (*moment of inertia*) is van de doorsnede van de strip.



b. Als de strip wordt gebogen in de richting zoals in de figuur aangegeven dan zal de bovenzijde van de strip onder trek staan en dus verlengen in de x-richting. Bereken de daaruit volgende verandering ΔU van de afstand tussen de twee dammetjes en druk deze uit in de centrale verplaatsing W (in eerste orde U/L).

c. In de praktijk worden de twee dammetjes gebruikt om bijvoorbeeld een enkel molecuul tussen op te spannen. Typische afmetingen die gebruikt worden, zijn $L \approx 20$mm, $t \approx 0.5$mm, $U \approx 2\mu$m. Wat is dan het geheim van een breekjunctie?

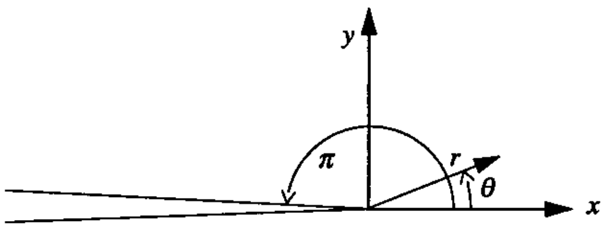
Vraag 4 Beschouw de situatie dicht in de buurt van een scherpe scheur (zie figuur) onder vlakke vervormingscondities (*plane strain*) in de dikterichting (loodrecht op het x-y vlak). Indien wordt aangenomen dat het materiaal zich lineair elastisch en isotroop gedraagt, wordt het spanningsveld gegeven door

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta)$$

waarbij r en θ poolcoördinaten zijn ten opzichte van de tip van de scheur (oorsprong van het (x,y) systeem),

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

De coëfficiënt K wordt bepaald door de belastingscondities ver weg van de scheurtip (die hier niet relevant zijn). Vanwege de singulariteit zijn alle spanningen maximaal voor $r \to 0$, maar op een eindige (maar kleine) afstand van de scheurtip hangen ze ook af van de hoek θ via de



functies $f_{ij}(\theta)$, die voor $i, j = 1\ldots2$ zijn gedefinieerd door

$$f_{11} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right],$$
$$f_{12} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right),$$
$$f_{22} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right].$$

Deze hoek-afhankelijkheid is voor belang voor eventueel optredende breukprocessen, zoals crazing in polymeren, of plasticiteit.

a. Beredeneer (dus zonder formules) waarom de schuifspanning $\sigma_{12} = 0$ langs $\theta = 0$.

b. Onder welke hoek is de hydrostatische spanning maximaal?

c. Beschouw glijvlakken loodrecht op het vlak van tekening die een hoek ϕ maken ten opzichte van $y = 0$ (zie onderstaande figuur) en die door de scheurtip $(0,0)$ gaan (omdat daar de spanningen maximaal zijn). Welke orientatie ϕ is het gunstigst voor plastische slip?